

文章编号:1000-8055(2013)04-0850-08

二自由度扭转干摩擦系统的频域响应计算方法

李 琳¹, 范 雨¹, 戴光昊²

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;

2. 中国船舶重工集团公司 第七〇三研究所, 哈尔滨 150000)

摘 要: 针对一类作扭转振动的干摩擦系统, 基于库仑阻尼模型和谐波平衡思想给出了其频域响应的求解方法, 考虑了干摩擦界面上可能出现的周期内全滑移运动及阻滞-滑移运动。首先, 建立了扭转干摩擦系统的二自由度集中质量模型, 并进行了无量纲化。其次, 建立了以谐波平衡思想处理该动力学模型的方法, 并给出了系统的接触面作周期内全滑移运动及阻滞-滑移运动的判定条件。最后, 对于这两种接触运动状态, 分别给出了其摩擦力的处理方法和谐波展开形式, 从而建立了扭转干摩擦系统的频域求解方法。以此方法计算了系统在一组不同的正压力下的响应, 其结果与数值积分法所得的结果取得了相当的一致。此半解析方法较数值积分方法更能揭示扭转干摩擦系统的工作机理, 并可以大幅提高计算时间, 其推导和求解过程可用于类似的非线性系统。

关 键 词: 库仑干摩擦; 谐波平衡法; 时频转换法; 阻滞-滑移运动; 非线性振动**中图分类号:** V232; O322**文献标志码:** A

Frequency domain solution of 2-DOF torsional dry friction system

LI Lin¹, FAN Yu¹, DAI Guang-hao²

(1. School of Energy and Power Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

2. No. 703 Research Institute,

China Shipbuilding Industry Corporation, Harbin 150000, China)

Abstract: The forced vibration response of a two degree of freedom (DOF) torsional system with Coulomb friction was studied, with a full consideration of the pure-slip and stick-slip contact motions. First, the 2-DOF lumped parameter model of such nonlinear system was presented and derived into a non-dimensional form. Second, the harmonic balance approach was used to establish a general frame of solving the response under different contact motion. Accordingly, the critical condition as well as the harmonic expands of friction force of the pure-slip and stick-slip contact motions were presented. Finally, the procedure of dealing with frequency domain solution was proposed. Based on this method, a group of results were obtained under different normal pressures, and were validated by the numerical integration method with a very good agreement. The proposed semi-analytical method provides more clear insights of the torsional dry friction system and therefore has advantage in computational cost.

Key words: Coulomb dry friction; harmonic balance approach;
time/frequency alternating method; stick-slip motion; nonlinear vibration

收稿日期: 2012-05-03**网络出版地址:** http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130417.1353.201304.850_019.html**作者简介:** 李琳(1956—), 女, 河北唐山人, 教授、博士生导师, 博士, 主要从事叶轮机械结构动力学研究。E-mail: feililin@buaa.edu.cn

在结构系统中引入干摩擦元件,并在适当的设计参数下使得摩擦界面上产生相对滑移,可以消耗系统的振动能量,抑制结构的振动水平,这一方法已在航空航天减振工程领域得到了广泛的应用^[1].

在有关干摩擦减振的研究中,通常人们关心的是引入干摩擦效应(元件)后系统在某个频率范围内的响应情况;而作为一类非线性问题,干摩擦系统的频域响应曲线难以获得解析的表达式.若采用数值积分方法求解非线性动力学方程组^[2],须在每一个频率点进行时域求解,并求时序响应的稳定值,这种逐点计算不仅非常费时,而且时序响应的稳定性对积分初值的设置很敏感,给减振设计初期的参数分析带来较大困难.

因此,频域响应求解成为干摩擦阻尼器设计中的关键问题.在已有的文献中,除数值积分方法^[3]外,对于该问题大致有三种思路:

1) 通过对“精确”时域解的解析求解得出频域解:文献^[4-5]分别给出了单自由度和二自由度弹簧-质量振子在基础激励下与一个固定的界面产生摩擦时系统的“精确”响应.

2) 谐波平衡法^[6]:将摩擦力表示为一系列谐波的叠加,利用三角函数基的性质将非线性常微分方程组的求解转换为非线性代数方程组的求解.文献^[7]对具有黏滞阻尼和干摩擦阻尼的系统进行了分析,证明了周期解的存在性和稳定性;文献^[8]中提出的增量谐波平衡法使得在求解中包含高次谐波成为可能,并分别分析了单自由度和二自由度干摩擦系统的响应,然而其算法的速度与数值积分法相比无明显优势.文献^[9]采用有限元方法建模,并细致地考虑了接触面上的局部滑移;文献^[10]中采用的动柔度法亦可看作是1阶谐波平衡法在多自由度系统中的应用.特别地,在考虑高次谐波、正压力分布和正压力随时间的变化时,为了确定摩擦力的谐波成分还发展了轨迹跟踪技术和时频转换方法^[11-13].其思路为:假设结构的时序响应,根据摩擦力表达式确定摩擦力的时序信息,再将此时序信息的谐波分量代入系统的谐波平衡方程组中,求解得到更“精确”的响应,如此迭代直到收敛(每次迭代都需要进行一次傅里叶变换和一次逆傅里叶变换).

3) 线性化方法^[14-15]:将摩擦效应按照在周期内做功相等的原则等效为相应的线性黏滞阻尼比,并通过迭代最终确定系统的响应.在使用该方法时须假设系统的振动形式(通常为某一阶振

型),以便确定接触面上的哪些相对运动将计入摩擦力做功.

本文针对二自由度扭转干摩擦系统的频域求解问题进行论述,所提出的方法的思路实际上与时频转换法相似,然而由于恰当的选取参数将摩擦力的波形解析地表示出来,并推导了相应的积分方程,直接获得了傅里叶变换的结果,无需数值求解,从而可大幅提升计算的速度和稳定性.

1 扭转干摩擦系统的动力学方程

虽然现有文献多针对叶盘结构^[9-14]或薄壳的周波数振动^[15]的干摩擦阻尼器进行研究,然而在齿轮、壳体等受扭转激振的结构上通过过盈、开口或旋转等方式产生正压力附着环、套筒等阻尼元件,亦可构成扭转干摩擦系统^[16-17],对其扭转振动进行抑制,如图1所示.在该系统中,阻尼元件的轴向位置是被约束住的,而周向运动则完全由干摩擦界面决定.在此情况下,可用集中质量模型来模拟与分析其运动规律,如图2所示.

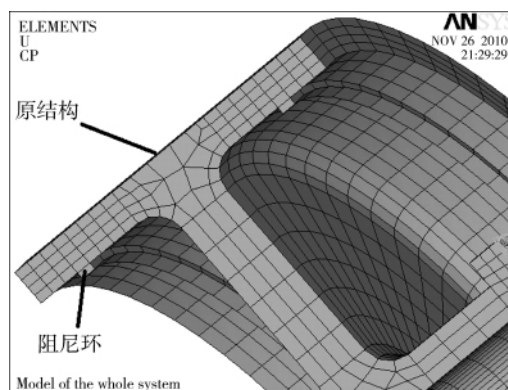


图1 扭转干摩擦系统示意

Fig. 1 Demonstration of the torsional friction system

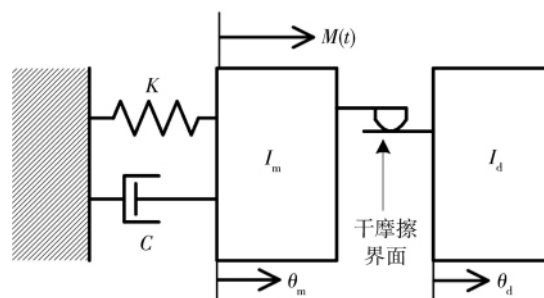


图2 扭转干摩擦系统的集中质量模型

Fig. 2 2-DOF (degree of freedom) lumped parameter model of the torsional friction system

在上述采用集中质量模型的研究中^[3-5,7,16],与结构产生干摩擦的对象均是地面,界面上的相

对速度即是结构的速度;而在本文探讨的场合中,阻尼元件本身也处于运动状态(且运动是未知的),干摩擦界面上的相对运动将更为复杂。

扭转干摩擦系统的集中质量模型如图2所示,其对应的动力学方程为

$$\begin{cases} I_d \ddot{\theta}_d = M_d \\ I_m \ddot{\theta}_m + C_m \dot{\theta}_m + K_m \theta_m = M(t) - M_d \end{cases} \quad (1)$$

其中 θ_m 和 θ_d 分别表示原结构和阻尼元件在扭转振动自由度上的位移; I_m, C_m, K_m 和 $M(t)$ 分别为原结构的转动惯量、阻尼系数、刚度和激振力矩; I_d 为阻尼元件的转动惯量。 M_d 为干摩擦阻尼力矩,根据库仑干摩擦假设,其取值由当前时间的相对运动状态决定

$$M_d = \begin{cases} \text{sign}(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_d) M_{cr} & S = 0 \\ I_d \ddot{\theta}_m & S = 1 \end{cases} \quad (2)$$

其中 M_{cr} 为最大静摩擦力矩,有

$$M_{cr} = \mu p R \quad (3)$$

式中 μ, p 和 R 分别为摩擦因数、正压力和接触面半径。 $\text{sign}(x)$ 是符号函数, $\text{sign}(x) = x/|x|$ 。

式(2)中 S 表征当前时间点的接触状态:状态 $S=0$ 表示“滑移”,状态 $S=1$ 表示“阻滞”。进一步地, S 可由当前的运动状况确定

$$S = \begin{cases} 1, & I_d |\ddot{\theta}_d| < M_{cr} \quad \text{and} \quad \dot{\theta}_m - \dot{\theta}_d = 0 \\ 0, & S \neq 1 \end{cases} \quad (4)$$

即当且仅当摩擦界面上的相对速度为零且阻尼元件的惯性力矩小于最大静摩擦力矩时,接触面上才不会产生相对滑移。

在本文的分析中,设激振力矩为简谐形式,即

$$M(t) = M_a \sin(\omega t) \quad (5)$$

为使推导和结论具有一般性,可对上述方程进行无量纲化,定义如下无量纲参数

$$\begin{cases} \tau = \omega t \\ \mu_d = I_d / I_m \\ \Omega^2 = \omega^2 I_m / K_m \\ \delta_d = \theta_d K_m / M_a \\ \delta_m = \theta_m K_m / M_a \\ M_d^{\text{norm}} = M_d / M_a \\ M_{cr}^{\text{norm}} = M_{cr} / M_a = \mu p R / M_a \end{cases} \quad (6)$$

其中 τ 是无量纲时间; δ_d 和 δ_m 是原无量纲位移; μ_d 是阻尼元件和原结构的转动惯量比; Ω 是频率比; M_d^{norm} 和 M_{cr}^{norm} 分别是无量纲摩擦力矩和最大静摩擦力矩。将这些式子带入式(1)~式(4),则系统的无量纲动力学方程为

$$\begin{cases} \mu_d \Omega^2 \delta_d'' = M_d^{\text{norm}} \\ \Omega^2 \delta_m'' + 2\xi \Omega \delta_m' + \delta_m = \sin \tau - M_d^{\text{norm}} \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$M_d^{\text{norm}} = \begin{cases} \text{sign}(\delta_m' - \delta_d') M_{cr}^{\text{norm}} & S = 0 \\ \mu_d \Omega^2 \delta_m'' & S = 1 \end{cases} \quad (8)$$

$S =$

$$\begin{cases} 1, & \Omega^2 |\delta_d''| < M_{cr}^{\text{norm}} \quad \text{and} \quad \delta_m' - \delta_d' = 0 \\ 0, & S \neq 1 \end{cases} \quad (9)$$

为了区别于对物理时间 t 求微分(在式(1)中用符号上方的一点来表示),这里用符号上方的一撇来表示对无量纲时间 τ 的微分。

2 谐波平衡法

将式(7)中的两个式子相加,消去 M_d^{norm} 并整理得

$$\Omega^2 \delta_m'' + 2\xi \Omega \delta_m' + \delta_m = \sin \tau - \mu_d \Omega^2 \delta_d'' \quad (10)$$

式(10)说明原结构所受的激振除外力矩(上式右端第一项)外,还承受阻尼元件的惯性力矩(上式右端第二项)——后者由阻尼元件的加速度决定,而由式(8)~式(9)可知,阻尼元件的加速度完全由原结构的加速度得到(而其速度可以由加速度积分得到)。亦即,该系统的激振力与系统的运动状态相关,描述该系统的动力学方程(10)是非线性动力学方程。在一些特殊参数下,该方程的响应可以直接获得:

1) 无阻尼元件时(阻尼元件的转动惯量为0),即 $\mu_d = 0$, 式(8)成为

$$\Omega^2 \delta_m'' + 2\xi \Omega \delta_m' + \delta_m = \sin \tau \quad (11)$$

是一个线性动力学方程,可求得其响应的复幅值为

$$R_m^{\text{orig}} = j / (1 - \Omega_m^2 + 2\xi \Omega j) \quad (12)$$

此为系统在引入干摩擦元件前的响应,此时系统的无量纲(无阻尼)固有频率为1。

2) 最大静摩擦力足够大时(正压力足够大),即接触状态在整个运动周期内恒为“阻滞”,式(8)成为

$$(1 + \mu_d) \Omega^2 \delta_m'' + 2\xi \Omega \delta_m' + \delta_m = \sin \tau \quad (13)$$

这也是一个线性动力学方程,可求得其响应的复幅值为

$$R_m^{\text{lock}} = j / [1 - (1 + \mu_d) \Omega_m^2 + 2\xi \Omega j] \quad (14)$$

此为干摩擦元件永不产生相对滑移(完全阻滞)时系统的响应,阻尼元件的作用仅仅是改变了系统的惯性,此时系统的无量纲(无阻尼)固有频率为 $(1 + \mu_d)^{-1/2}$ 。

在上述两种极端情况下,干摩擦界面上均未

产生相对滑移.而在一定的参数范围内,干摩擦界面上的相对运动还有“周期内完全滑移”和“阻滞-滑移运动”两种情形,分别如图3和图4所示.

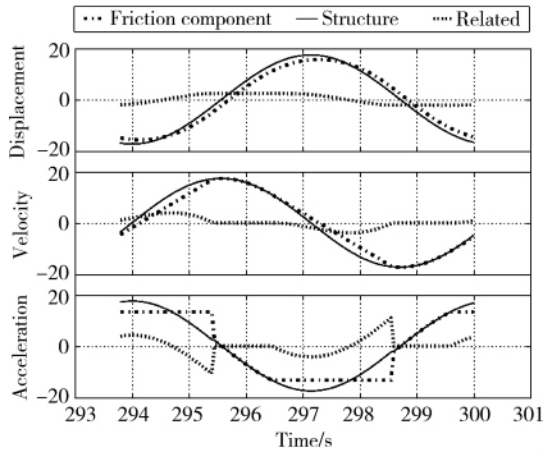


图3 阻滞-滑移运动的一个稳定周期

Fig. 3 Stable period of the stick-slip motion

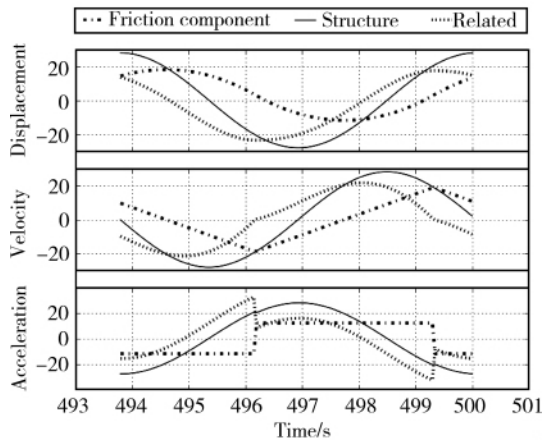


图4 全滑移运动的一个稳定周期

Fig. 4 Stable period of the full-slip motion

图3和图4所示的结果都由本文作者编写的一个由Python程序设计语言实现的、采用非线性Newmark方法^[2]的计算程序在不同的最大静摩擦力矩参数下获得.

系统在这两种接触运动状态下的稳态响应都可以由谐波平衡法求得,其基本思路是将式(10)中的各未知函数都按激振力的谐波展开,通常取一阶谐波即能达到较高的精度^[7,9-10].因此,可设原结构的稳态加速度为

$$\delta_m'' \simeq A_m \sin(\tau + \theta) = A_m \cos\theta \sin\tau + A_m \sin\theta \cos\tau \quad (15)$$

则原结构的速度和位移为

$$\delta_m' = A_m \sin\theta \sin\tau - A_m \cos\theta \cos\tau \quad (16)$$

$$\delta_m = -A_m \cos\theta \sin\tau - A_m \sin\theta \cos\tau \quad (17)$$

阻尼元件的加速度可设为

$$\delta_d'' \simeq a \sin(\tau + \theta) + b \cos(\tau + \theta) \quad (18)$$

其中系数 a 和 b 由干摩擦界面上的运动状态决定,将在后续内容中进行探讨.

将式(15)~式(18)代入式(10)中,并使等号两侧 $\sin\tau$ 和 $\cos\tau$ 的系数分别相等,有

$$\begin{cases} \Omega^2 A_m \sin\theta - 2\xi\Omega A_m \cos\theta - A_m \sin\theta + \mu_d \Omega^2 (a \sin\theta + b \cos\theta) = 0 \\ \Omega^2 A_m \cos\theta + 2\xi\Omega A_m \sin\theta - A_m \cos\theta + \mu_d \Omega^2 (a \cos\theta - b \sin\theta) - 1 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

式(19)中有两个方程,却有 A_m, θ, a 和 b 四个未知数,暂时无法求解.如前所述,系数 a 和 b 是由接触面的相对运动状态确定的,因此接下来将分别讨论系统在周期内全滑移和阻滞-滑移运动时这两个系数的确定.

3 阻滞-滑移时的摩擦力

若将图3中系统的加速度响应取出两个完整的周期,并合适地选择时间的零点,使得 $\delta_m'' = A_m \sin\tau$,则阻尼元件的加速度在一个周期内的波形 δ_d'' 为(如图5所示)

$$\delta_d''(\tau) = \begin{cases} A_m \sin\tau & \tau \in [0, \pi/2 - \varphi_0) \cup [\pi/2 + \varphi_1, 3\pi/2 - \varphi_0) \cup [3\pi/2 + \varphi_1, 2\pi) \\ A_{cr} & \tau \in [\pi/2 - \varphi_0, \pi/2 + \varphi_1) \\ -A_{cr} & \tau \in [3\pi/2 - \varphi_0, 3\pi/2 + \varphi_1) \end{cases} \quad (20)$$

其中 φ_0 和 φ_1 用来表示接触面开始相对滑移及结束相对滑移的无量纲时间(相位).另外,值得注意的是,要使接触面在一个运动周期内出现相对滑移,还应当有

$$A_m/A_{cr} > 1 \quad (21)$$

其中 A_{cr} 为静摩擦力所能提供的最大加速度

$$A_{cr} = M_{cr}^{norm}/\mu_d \Omega^2 \quad (22)$$

图5中相位 φ_0 可以直接由 A_{cr} 和 A_m 确定

$$A_m \cos\varphi_0 - A_{cr} = 0 \quad (23)$$

而 φ_1 则需要满足一个积分

$$\int_{\pi/2 - \varphi_0}^{\pi/2 + \varphi_1} (A_m \sin\tau - A_{cr}) d\tau = 0 \quad (24)$$

即

$$A_m \sin\varphi_0 + A_m \sin\varphi_1 - A_{cr}\varphi_0 - A_{cr}\varphi_1 = 0 \quad (25)$$

以使得系统在该时间点时相对速度为零,且惯性

力小于最大静摩擦力(即满足式(9)中的阻滞条件)。

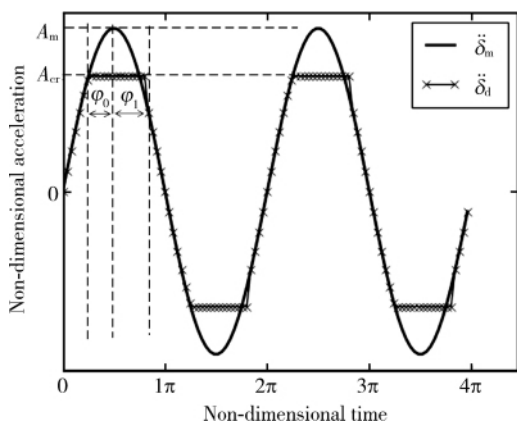


图5 阻滞-滑移运动中阻尼元件加速度的确定

Fig. 5 Determination of the acceleration for the damping component in the stick-slip motion situation

最后,将式(20)作傅里叶展开,并取一次谐波的系数,即可确定 a 和 b

$$a = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta_d''(\tau) \sin \tau d\tau = \frac{A_m}{\pi} \left(\pi - \varphi_0 - \varphi_1 - \frac{\sin 2\varphi_0 + \sin 2\varphi_1}{2} \right) + \frac{2A_{cr}}{\pi} (\sin \varphi_0 + \sin \varphi_1) \quad (26)$$

$$b = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta_d''(\tau) \cos \tau d\tau = \frac{1}{\pi} [A_m (\cos^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_1) + 2A_{cr} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0)] \quad (27)$$

本节推导了式(23)、式(25)~式(27)四个方程,连同式(19)共6个(非线性代数)方程,其中有 $A_m, \theta, a, b, \varphi_0$ 和 φ_1 6个未知数,从而具备了求解的可能。

4 接触状态的判定依据

考察式(24)可以发现:在 $\varphi_1 \in [\varphi_0, 2\pi - \varphi_0]$ 的范围内,积分的值随着 φ_1 和 A_{cr} 的增加而减小,这意味着在较小的 A_{cr} 值下,直接求解式(9)、式(23)、式(25)~式(27)有可能得到在区间 $[\pi - \varphi_0, 2\pi - \varphi_0]$ 内的 φ_1 值。而实际上,如图5可知,由于在一个周期内有两次局部滑移, φ_1 的可接受的取值范围只能是 $[\varphi_0, \pi - \varphi_0]$, 求出的值若在这一范围之外只能说明系统在当前的参数下无法以阻滞-滑移的方式进行振动。

具体地,可以利用上述性质给出系统进行阻

滞-滑移运动的另一个临界条件(已有的临界条件是式(21)),即将 φ_1 的最大值 $\varphi_1 = \pi - \varphi_0$ 代入式(24)(或式(25))中

$$\frac{A_m}{A_{cr}} \sin \varphi_0 - \frac{\pi}{2} = 0 \quad (28)$$

与式(23)联立,消去 φ_0 得

$$\frac{A_m}{A_{cr}} = \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{2} \quad (29)$$

此即产生阻滞-滑移运动的 A_m/A_{cr} 的上限,与式(21)结合,构成了阻滞-滑移运动的判定条件

$$1 < A_m/A_{cr} < \sqrt{\pi^2 + 4}/2 \quad (30)$$

这也同时给出了全滑移运动的判定条件

$$A_m/A_{cr} > \sqrt{\pi^2 + 4}/2 \quad (31)$$

以及全阻滞运动的判定条件

$$A_m/A_{cr} < 1 \quad (32)$$

除了可用于对求解结果的检验,式(30)~式(32)还为扭转干摩擦系统接触状态的实验识别提供了直接的定量判定依据:扭转振动响应峰值 A_m 是直接可测得的量,而最大加速度 A_{cr} 是设计量,根据上述推论,两者的比值将直接反映出当前设计参数下干摩擦界面的相对运动情形,为改良设计提供依据。

5 全滑移时的摩擦力

当干摩擦界面在周期内全滑移时,根据式(8),阻尼元件的加速度将呈方波形式,如图4所示。若将图4中系统的加速度响应取出两个完整的周期,并合适地选择零点,使得 $\delta_m'' = A_m \sin \tau$, 则阻尼元件的加速度在一个周期内的波形 δ_d'' 为(如图6所示)

$$\delta_d''(\tau) = \begin{cases} A_{cr} & \tau \in [\pi/2 - \varphi_0, 3\pi/2 - \varphi_0) \\ -A_{cr} & \tau \in [0, \pi/2 - \varphi_0) \cup [3\pi/2 - \varphi_0, 2\pi) \end{cases} \quad (33)$$

其中只需要一个参数 φ_0 用来表示两个波形(方波与正弦波)之间的相位关系,其取值同样受一个积分式约束,即需使得在方波的符号改变之时(相对速度的符号改变之时)相对速度的值为零

$$\int_{\pi/2 - \varphi_0}^{3\pi/2 - \varphi_0} (A_m \sin \tau - A_{cr}) d\tau = 0 \quad (34)$$

即

$$2A_m \sin \varphi_0 - \pi A_{cr} = 0 \quad (35)$$

最后将式(33)作傅里叶展开,并取一次谐波的系数,即可确定全滑移运动时的 a 和 b

$$a = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta_d''(\tau) \sin \tau d\tau = \frac{4}{\pi} A_{cr} \sin \varphi_0 \quad (36)$$

$$b = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta_d''(\tau) \cos \tau d\tau = -\frac{4}{\pi} A_{cr} \cos \varphi_0 \quad (37)$$

本节推导了式(35)~式(37)三个方程,连同式19共5个(非线性代数)方程,其中有 A_m, θ, a, b 和 φ_0 5个未知数,可对问题进行求解。

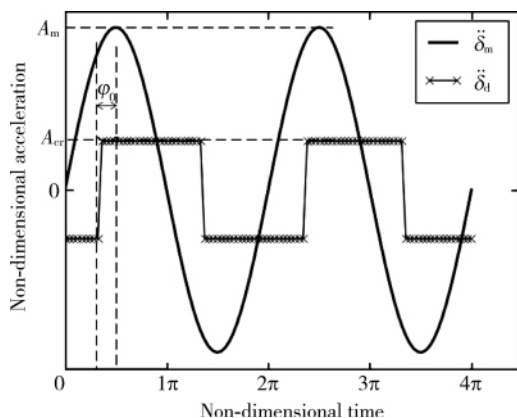


图6 全滑移运动中阻尼元件加速度的确定

Fig. 6 Determination of the acceleration for the damping component in the full-slip motion situation

6 频域求解步骤

虽然式(30)~式(32)给出了干摩擦界面上相对运动状态的判定条件,然而其判定亦首先需要得知系统的响应。因此,在对扭转干摩擦系统进行频域计算时需要进行一定的试算,并结合判定条件确定当前参数下系统的相对运动状态,从而确定求解哪一组方程。具体地,在本文中对扭转干摩擦系统的求解步骤为:

1) 输入无量纲参数,频率比、转动惯量比、结构阻尼比、最大静摩擦力矩。

2) 第1次试算和检验,按完全阻滞状态(式(14))计算系统的响应;若结果满足完全阻滞的判定条件(式(32))则将此作为最终结果,转到第5步;否则继续下一步试算。

3) 第2次试算和检验,按阻滞-滑移状态(式(9)、式(23)、式(25)~式(27))计算系统的响应;若满足阻滞-滑移状态的判定条件(式(30))则将此结果作为最终结果,转到第5步;否则(包括方程组无解)继续下一步计算。

4) 第3次计算,按全滑移状态(式(9)、式(35)~式(37))计算系统的响应,将此结果作为最终结果。

5) 输出计算结果,计算结束。

7 计算结果及验证

采用上述方法在一套给定如下无量纲参数对扭转干摩擦系统进行了频域求解:频率(比)范围为 $\Omega \in [0.9, 1.05]$;转动惯量比 $\mu_d = 0.05$;结构阻尼比 $\xi = 0.005$;最大静摩擦力矩 $M_{cr}^{norm} = 0.5$ 。

其响应的幅频,相频曲线以及接触状态如图7所示。作为对比,在其中还给出了系统在全阻滞状态和原始状态下的无量纲(ND)幅频和相频曲线。在接触状态的展示中,0表征“全阻滞”,1表征“全滑移”,0.5则表示“阻滞-滑移运动”。可以看出在该组参数下,三种接触状态均出现在分析频带内,同时由于在较广的频带内均存在摩擦耗能,响应的峰值也大大低于原始响应峰值。

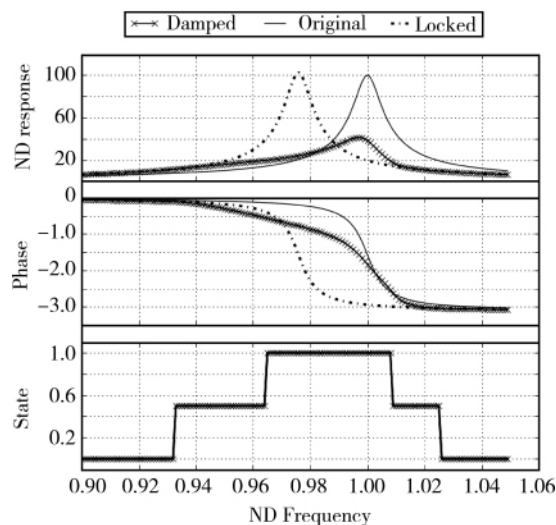


图7 在一组参数下的响应计算结果

Fig. 7 Analysis results obtained from a set of parameters

同样,使上述参数中的最大静摩擦力矩 M_{cr}^{norm} 发生变化(在0.3到10.0间取了8个值), $\mu_d = 0.1, \xi = 0.005$, 分别基于本文提出的方法和采用非线性 Newmark 法的数值积分方法计算了结构的响应曲线,并进行了对比,如图8所示。其中离散点为数值积分方法所得的结果,连续的线为频域求解方法所得的结果。在计算速度上,后者的耗时远远小于前者,数值积分方法计算一个点所需的时间足够频域解法算出上述所有曲线。图9逐个展示了两组计算结果之间的吻合程度,可见在所有计算的参数下两种方法所得的结果都取得了很好的一致。同时也说明在仅采用1阶谐波时就已经可以达到较好的计算精度。

从图8可见,当最大静摩擦力矩增大时(可由正压力的增大或激振力的减小导致,见式(6)),系统的响应曲线由原始响应曲线向全阻滞响应曲线过渡,在此过程中存在一个最小的响应曲线,以及一个对于振动抑制来说最佳的静摩擦力矩。这一趋势与叶盘干摩擦系统相同^[12]。

与叶盘干摩擦系统中仅可通过调整最大静摩擦力矩来调整干摩擦阻尼效果不同,对于扭转干摩擦系统还可以通过调整阻尼元件的质量(即无量纲参数 μ_d)来影响系统的阻尼效果,图10给出了不同转动惯量比下系统在共振频带内的最大响应,其中图9的结果与曲线($\mu_d = 0.10$)对应。

从图10可见,增大阻尼元件的质量使无量纲临界摩擦力的最佳值增大,同时使其最佳减振效果提高,且随着阻尼元件质量的增大,上述趋势逐渐减缓。由于引入较大质量的阻尼元件会对原系统的固有特性造成较大的改变,在通常情况下这是不希望发生的,而由于在较小的转动惯量比下已达到较好的振动抑制效果,因此在设计须综

合考虑,并取适当的转动惯量比即可。

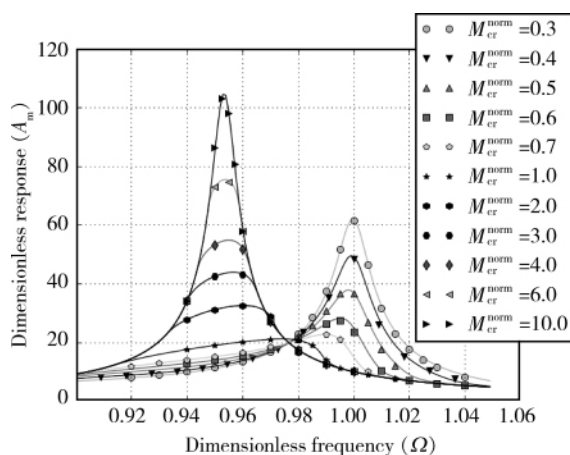


图8 在不同的最大静摩擦力矩下频域方法与数值积分方法的计算结果对比

Fig. 8 Comparison between the proposed frequency domain method and the numerical integration method under different maximum static friction forces

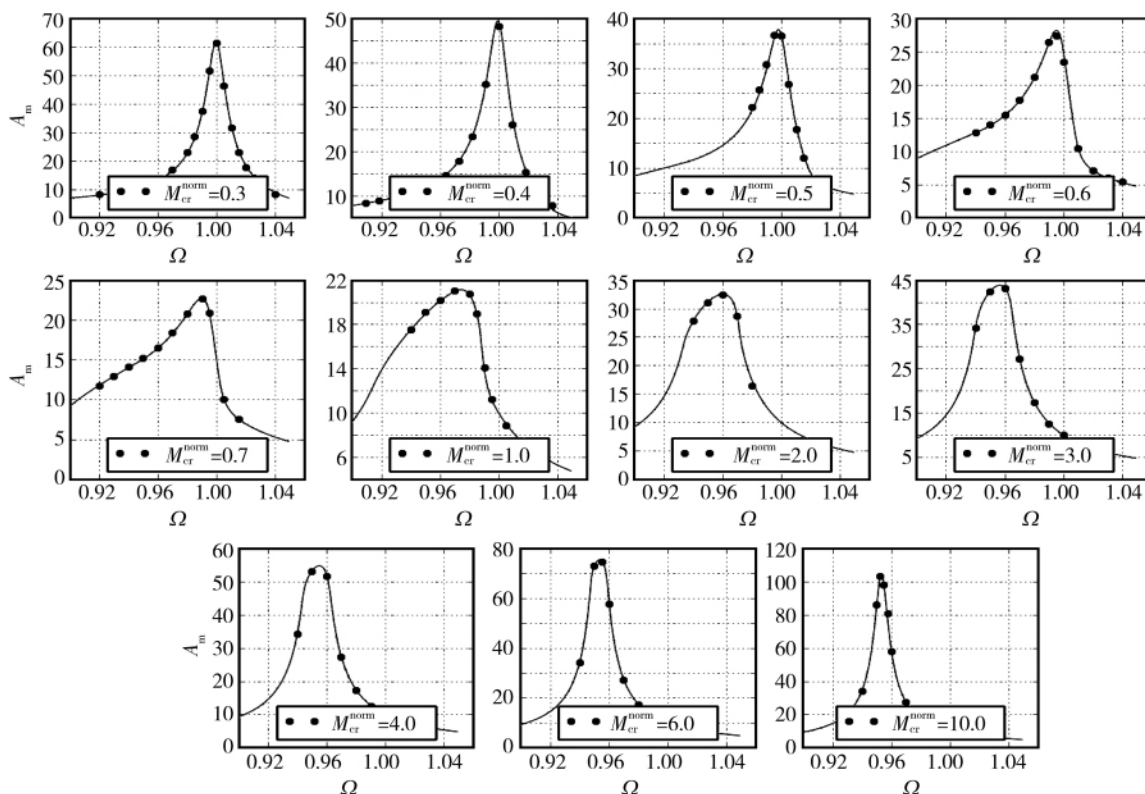


图9 在不同的最大静摩擦力矩下频域方法与数值积分方法的计算结果对比(逐线对比)

Fig. 9 Comparison between the proposed method and the numerical integration method under different parameters (line by line)

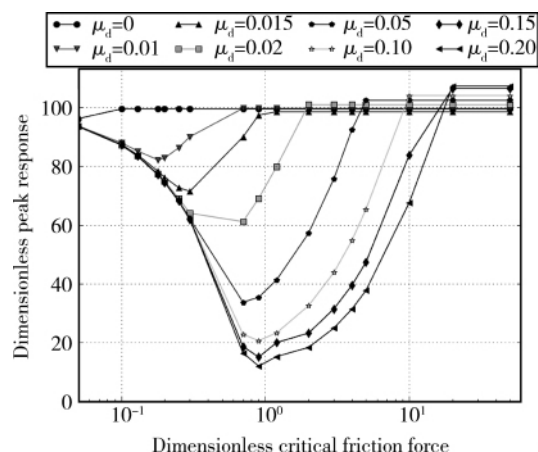


图 10 在不同的转动惯量比参数下的响应峰值

Fig. 10 Peak response obtained from different damper mass

8 结 论

本文从干摩擦产生的机理出发,导出了具有干摩擦阻尼元件的系统在周期内发生全滑移和阻滞-滑移时一次谐波运动的解析表达式,基于此对二自由度扭转干摩擦系统的无量纲模型进行了分析,建立了其频域求解方法。本文提出的方法可视为一种改进的时频转换方法,与数值积分方法相比,既保证了精度又极大地减小了计算时间。本项研究的更重要的意义还在于这一方法为干摩擦元件减振初期设计的参数分析提供了理论方法,而这类分析采用数值积分的方法是较为困难的。本文采用的方法和获得的结论均适用于相似的非线性问题。

本文分别给出了系统的原始响应和在全阻滞状态、阻滞-滑移状态,以及全滑移状态下的幅频、相频响应和各频率点下的接触状态,均与数值积分方法的结果十分吻合,证明了该方法的正确性。以此方法分析了转动惯量比和临界摩擦力对系统响应的影响。

作为推论,给出了各接触状态的判定条件。除了可用于对求解结果的检验,还为扭转干摩擦系统接触状态的实验识别提供了直接的定量判定依据:扭转振动响应峰值和最大加速度的比值将直接反映出当前设计参数下干摩擦界面的相对运动情形。

参考文献:

[1] Griffin J H. A review of friction damping of turbine blade vibration[J]. International Journal of Turbo and Jet Engines, 1990, 7: 297-307.
[2] 张雄,王天舒. 计算动力学[M]. 北京:清华大学出版社,2007.

[3] Xia F. Modeling of a two-dimensional coulomb friction oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 265(5): 1063-1074.
[4] Hundal M S. Response of a base excited system with coulomb and viscous friction[J]. Journal of Sound and Vibration, 1979, 64(3): 371-378.
[5] Gordon C K Y. Forced vibration of a two degree of freedom system with combined coulomb and viscous damping[J]. Journal of Sound and Vibration, 1964, 64(3): 371-378.
[6] 刘延柱,陈立群. 非线性振动[M]. 北京:高等教育出版社, 2003.
[7] 白鸿柏,黄协情. 干摩擦振动系统响应计算方法研究[J]. 振动工程学报, 1998, 11(4): 472-476.
BAI Hongbai, HUANG Xieqing. Study on response computation of dry friction damped vibration system[J]. Journal of Vibration Engineering, 1998, 11(4): 472-476. (in Chinese)
[8] Pierre C, Ferri A A, Dowell E H. Multi-harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method[J]. Transaction of the ASME, 1985, 52(4): 958-964.
[9] 漆文凯,高德平. 带摩擦阻尼装置系统振动响应分析方法研究[J]. 航空动力学报, 2006, 21(1): 161-167.
QI Wenkai, GAO Deping. Study of vibration response analysis method for the dry friction damping systems[J]. Journal of Aerospace Power, 2006, 21(1): 161-167. (in Chinese)
[10] 郝燕平,朱梓根. 带摩擦阻尼的叶片响应求解方法[J]. 航空学报, 2001, 22(5): 411-414.
HAO Yanping, ZHU Zigen. New method to resolve vibration response of blades with friction damping[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2001, 22(5): 411-414. (in Chinese)
[11] 史亚杰. 叶片非线性振动响应分析及干摩擦减振设计研究[D]. 北京:北京航空航天大学, 2006.
SHI Yajie. Analysis of nonlinear response and design of vibration damping of shrouded blades system[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006. (in Chinese)
[12] HONG Jie, CHEN Lulu, MA Yanhong, et al. Design method of friction damping at blade-disk joints[R]. ASME Paper GT2009-59510, 2009.
[13] SHI Yajie, HONG Jie, SHAN Yingchun. Forced response analysis of shrouded blades by an alternating frequency/time domain method[R]. ASME Paper GT2006-90595, 2006.
[14] Earles S W E, Williams E J. A linearized analysis for frictionally damped systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1972, 24(4): 445-458.
[15] ZENG Liang, LI Lin. The dynamic frictional performance of damping-rings in labyrinth air seal for vibration control[R]. ASME Paper GT 2009-59582, 2009.
[16] DUAN Chengwu, Singh R. Forced vibration of a torsional oscillator with coulomb friction under a periodically varying normal load[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 325(3): 499-506.
[17] 晏砺堂,朱梓根,李其汉. 高速旋转的机械振动[M]. 北京:国防工业出版社, 1994.